

Előszó	5
1. Ismétlés	9
1.1. Műveletek racionális számokkal	9
1.2. A százalékszámításról	12
2. Halmazelmélet	17
2.1. Bevezetés a halmazelméletbe	17
3. Algebra	31
3.1. Hatványozás egész kitevővel	31
3.2. Betűs kifejezések	37
3.3. Algebrai tört kifejezések	47
3.4. Négyzetgyökvonás	52
4. Számelmélet	58
4.1. Bevezetés a számelméletbe	58
4.2. Számrendszerek	66
5. Függvények	69
5.1. Bevezetés a függvénytanba	69
5.2. A függvények ábrázolása, jellemzése	75
6. Egyenletek	87
6.1. Egyenletek grafikus megoldása	87
6.2. Az egyenletekről	88
6.3. Törtes egyenletek	92
6.4. Szöveges feladatok	93
6.5. Másodfokú egyenletek	102
6.6. Négyzetgyökös egyenletek	111
6.7. Abszolút értékes egyenletek	113
6.8. Az egyenlőtlenségekről	115
6.9. Az ekvivalens (egyenértékű) átalakításokról	118
6.10. Egyenletrendszerek	122
7. Geometria	129
7.1. A háromszög szögeire, oldalaira vonatkozó tételek	129
7.2. A háromszög nevezetes vonalai és pontjai	132
7.3. A háromszög területszámítási módjai	137
7.4. A speciális négyszögek fajtái	140
7.5. Konvex sokszögek	145
7.6. A kör és részei	147
7.7. Látószög	153
7.8. Húrnégyszögek, érintőnéyszögek	154
7.9. Geometriai transzformációk	156
7.10. Hasonlóság	160
7.11. Vektorok	170

TARTALOMJEGYZÉK

7.12. Trigonometria	173
8. Gondolkodási módszerek	182
8.1. Skatulyaelv, logika	182
9. Kombinatorika	190
9.1. Kombinatorikai problémák	190
10. Gráfok	203
10.1. Gráfelmélet	203
11. Statisztika, valószínűségszámítás	210
11.1. Statisztika	210
11.2. Valószínűségszámítás	222

1. Ismétlés



1.1. Műveletek racionális számokkal

Racionális számok azok a számok, melyek felírhatók két egész szám hányadosaként,

azaz $\frac{a}{b} = \frac{\text{számláló}}{\text{nevező}}$ (nevező $\neq 0$) alakban.

a) *Műveletek sorrendje:*

- elsődleges a hatványozás,
- másodlagos a szorzás, osztás: $5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$, de $(5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$ vagy $-2^4 = (-1) \cdot 2^4 = -16$, de $(-2)^4 = +16$,
- végül az összevonás (összeadás, kivonás) $5 - \cancel{x} \cdot \frac{7}{\cancel{x}} + \frac{2}{3} = 5 - 7 + \frac{2}{3} = -2 + \frac{2}{3} = \dots$,
- de zárójelek segítségével módosíthatjuk a műveletek sorrendjét, a bennük szereplő művelet elsődlegessé válik: $(5 - 3) \cdot \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{9}{3} = \dots$

b) *Műveleti tulajdonságok:*

Bármely számokkal végezve

▪ felcserélhető (= kommutatív) az összeadás és a szorzás:

$$5 + 6 = 6 + 5 \text{ és } 11 \cdot 10 = 10 \cdot 11,$$

▪ tetszőlegesen zárójelezhető (= asszociatív) az összeadás és a szorzás:

$$(2 + 3) + 8 = 2 + (3 + 8) \text{ és } (5 \cdot 2) \cdot 4 = 5 \cdot (2 \cdot 4),$$

▪ megosztható (= disztributív) a szorzás és az osztás az összeadásra/kivonásra nézve:

$$\left(9 - \frac{8}{5}\right) \cdot 5 = 9 \cdot 5 - \frac{8}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} = \dots \text{ és } (12 - 26 + 8) : 2 = 12 : 2 - 26 : 2 + 8 : 2 = \dots$$

c) *Törtek:*

- Törtek értékét nem változtatja meg
 - az **egyszerűsítés**, mely során a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a nullától különböző számmal osztjuk,
 - a **bővítés**, mely során a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a nullától különböző számmal szorozzuk.
- Törteket úgy vonunk össze, hogy közös nevezőre hozás (általában bővítéssel) után a számlálókat összevonjuk, a közös nevezőt egyszer leírjuk:

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{2} + \frac{6}{5} = \frac{15}{20} - \frac{70}{20} + \frac{24}{20} = \frac{15 - 70 + 24}{20} = \frac{-31}{20} \left(= -\frac{31}{20} \right).$$

(Közös nevezőnek célszerű a nevezők legkisebb közös többszörösét választani.)

d) *Műveletek törtekkel:*

- Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel szorozzuk (előtte, ha lehet, egyszerűsítünk):

1. ISMÉTLÉS

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15} \quad \text{vagy} \quad \frac{\cancel{2}^3}{\cancel{3}_2} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{5}_7} = \frac{1}{35} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{3}{98}$$

- Törtet nullától különböző egésszel úgy szorzunk, hogy a számlálót szorozzuk az egésszel, a nevezőt változatlanul hagyjuk (előtte, ha lehet, egyszerűsítünk):

$$\frac{10}{9} \cdot 2 = \frac{10 \cdot 2}{9} = \frac{20}{9} \quad \text{vagy} \quad \frac{10}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}_1} = \frac{10 \cdot 2}{3} = \frac{20}{3}$$

- Nullától különböző törttel úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk:

$$5 : \frac{8}{3} = 5 \cdot \frac{3}{8} = \dots \quad \text{vagy} \quad \frac{13}{8} : \frac{5}{2} = \frac{13}{8} \cdot \frac{2}{5} = \dots$$

- Törtet nullától különböző egésszel úgy osztunk, hogy
 - ha a számláló osztható az egésszel, akkor elosztjuk vele és a nevezőt változatlanul hagyjuk, vagy
 - ha a számláló nem osztható az egésszel, akkor a nevezőt szorozzuk vele és a számlálót változatlanul hagyjuk:

$$\frac{8}{7} : 2 = \frac{4}{7} \quad \text{vagy} \quad \frac{8}{7} : 3 = \frac{8}{21}$$

- K** 1. Rendezze nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat!

a) $\frac{7}{8}$; $\frac{8}{11}$; 0,75; -0,1; $-\frac{1}{5}$; $-\frac{6}{5}$; 1,3; $\frac{8}{7}$; 0;

b) 3^2 ; $(-4)^2$; $|-11|$; -5^2 ; 2^3 ; $(-1)^3$.

- K** 2. Végezze el a kijelölt műveleteket!

a) $3 - (3 - (3 - (3 - 3)))$;

b) $\frac{11 + 9 \cdot 6 : 2}{9 \cdot 4 - 2 \cdot (3 + 6) + 1}$;

c) $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32} + \frac{65}{64} - 7$;

d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{24}{8}$;

e) $\frac{5}{8} - \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{12} - \frac{3}{4}$;

f) $-\frac{27}{42} \cdot \left(-\frac{28}{45}\right) + \frac{18}{30}$;

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} : \left(\frac{6}{10} : 3\right) \cdot \frac{9}{8}$;

h) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{28} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2$;

i) $\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{1}{3} - \frac{7}{15}\right)$;

j) $\left(\frac{1}{7} + \frac{5}{49}\right) : \frac{4}{7} : \frac{3}{14} - \frac{1}{7}$;

1. ISMÉTLÉS

$$k) \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} : \frac{5}{9} + \frac{5}{6} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right).$$

K 3. Végezze el a kijelölt műveleteket, majd a kapott számokat állítsa növekvő sorrendbe!

$$a) \frac{3}{8} \cdot 0,4 - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} : 2\frac{1}{2};$$

$$b) \left(\frac{3}{8} \cdot 0,4 - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \right) : 2\frac{1}{2};$$

$$c) \frac{3}{8} \cdot \left(0,4 - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \right) : 2\frac{1}{2};$$

$$d) \frac{3}{8} \cdot 0,4 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \right) : 2\frac{1}{2}.$$

K 4. Végezze el a kijelölt műveleteket!

$$a) \frac{\frac{12}{25} - 2}{\frac{19}{5}};$$

$$b) \frac{\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{20} \right) + 3}{\frac{4}{3} - \frac{4}{5}};$$

$$c) \frac{\frac{5}{2} - \frac{9}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{6}}{2 + \frac{1}{3}};$$

$$d) \frac{\left(\frac{5}{2} - \frac{9}{8} \right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{6} \right)}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}};$$

$$e) \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}}{3} : \left(\frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{3}{5}} - 1 \right);$$

$$f) \frac{2 + \frac{2}{3}}{2 - \frac{3}{3}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{3}{3}}.$$

1. ISMÉTLÉS

K 5. Végezze el az alábbi műveleteket!

a) $(1000 - 3) \cdot 15 + 3 \cdot 15$;

b) $\frac{3}{7} \cdot 4 \cdot \frac{5}{12} : \frac{15}{9} : \frac{6}{14}$;

c) $1 + 3 + 5 + \dots + 95 + 97 + 99$;

d) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2007}\right)$;

e) $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2007}\right)$;

f) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2006 \cdot 2007}$.

1.2. A százalékszámításról



Egy mennyiség 1%-án az $\frac{1}{100}$ részét értjük.

 Pl.: 11-nek a 3 százaléka $11 \cdot \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$.

Problématípusok:

a) „Hány %-a az X az Y -nak?” \rightarrow válasz: $\frac{X}{Y} \left(= \frac{\text{amit viszonyítunk}}{\text{amihez viszonyítunk}} \right) \cdot 100\%$.

Ha egy gimnázium 784 tanulója közül 415 lány, akkor a diákok hány %-a fiú?

$$\frac{\text{fiúk száma}}{\text{diákok száma}} = \frac{784 - 415}{784} = \frac{369}{784} \approx 0,471 = \frac{471}{1000} = \frac{47,1}{100} = 47,1\%.$$

b) „Hány %-kal több/kevesebb az X az Y -nál?”

Egy kiállításnak az első héten 1906, a második héten 2333 látogatója volt. Hány %-kal voltak többen a második héten, mint az elsőn?

$$\frac{2333}{1906} \approx 1,224 = 1 \frac{224}{1000} = 122,4\% \rightarrow 122,4\% - 100\% = 22,4\% \text{ -kal voltak többen.}$$

Egy élelmiszer árát 899 forintra 730 forintra értékelték le. Hány %-kal lett olcsóbb a termék?

$$\frac{730}{899} \approx 0,812 = 81,2\% \rightarrow 100\% - 81,2\% = 18,8\% \text{ -kal lett olcsóbb.}$$

K 6. Melyik szám a nagyobb és mennyivel?

a) $\frac{3}{8}$ és $\frac{1}{3}$ összegének a harmada vagy $\frac{3}{8}$ és $\frac{1}{3}$ különbségének az ötszöröse;

b) $\frac{55}{36}$ -nak a 160%-a vagy $\frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$;

1. ISMÉTLÉS

- c) $3\frac{4}{7}$ reciproka vagy 0,4-nek a 40%-a;
d) $\frac{7}{5}$ -nek a $\frac{3}{4}$ része vagy 3,2-nek a 35%-a.

K 7. Döntse el, hogy melyik mennyiség a nagyobb!

- a) $\frac{3}{5}$ hl $\frac{3}{5}$ része vagy 32 l + 32 dl;
b) $\frac{5}{12}$ h 120%-a vagy 2000 s $\frac{4}{5}$ része;
c) 1 km másfélszerese vagy 120 m $\frac{40}{3}$ része.

K 8. Pótolja a hiányzó mérőszámokat!

- a) 1 nap = s;
b) 7500 g = kg;
c) $2\text{ m}^3 = \dots\dots\dots$ l;
d) 8750 mm = dm;
e) $1\text{ cm}^2 = \dots\dots\dots$ mm²;
f) 15 s = min;
g) 23 dkg = g;
h) 0,6 l = dl.

K 9. Egy országjáró túrán az osztály az első napon 10,75 km-t, a második napon $8\frac{2}{5}$ km-t tett meg. A harmadik napon annyi utat tettek meg, mint az első két napon összesen. Mennyi út van még hátra, ha a teljes túra 50,2 km-es?

K 10. Egy szabó 30,25 m² anyagból 11 db ruhát készít. Hány darab ugyanilyen ruhát tudna készíteni 22 m² anyagból? Mennyi anyag kellene 275 db ruhához, ha minden esetben az összes anyagot felhasználja a szabó?

K 11. Egy 1 dm élű kockát 1 mm³ térfogatú kis kockákból raktunk ki. Sorba rakva a kis kockákat, milyen hosszú sor alakul ki?

K 12. 1-től 1000-ig leírtuk az összes természetes számot. Hány számjegyet kellett leírni? Hányszor fordul elő az 5-ös számjegy?

1. ISMÉTLÉS

- K** 13. Egy család 25 km-es túrát tervez 4 napra. Az első napon megtesznek $8\frac{1}{3}$ km-t, a második napon a maradék 0,4 részét, a harmadik napon a maradék $\frac{6}{7}$ részét.
- Hány km-t tesznek meg a negyedik napon?
 - Hány százaléka ez a teljes távnak (egy tizedesjegyre kerekítve)?
- K** 14. Számítsa ki, hogy hány %-a...
- az egy órának a 24 perc, illetve a 90 perc;
 - az egy méternek a 3 deciméter, illetve a 10 deciméter;
 - az egy napnak a 6 óra;
 - a fél kilométernek az 1200 méter, illetve az 1 méter;
 - a 4 deciliternek az 1 liter, illetve a fél liter!
- K** 15. A nyár végi árleszállításon egy 2600 forintos pólót 40%-kal leértékeltek. Mennyiért vehető meg így?
- K** 16. Két testvér összeszámolta, mennyi zsebpénz van náluk külön-külön. Kiderült, hogy Anna pénze Bea pénzének $\frac{2}{5}$ -e.
- Hány %-a Bea pénze Annáénak?
 - Mennyi pénzük van külön-külön, ha összesen 350 Ft-juk van?
- K** 17. Egy osztálykirándulás költségének 16%-át étkezésre, 54%-át szállásra fordították. A maradék 22 500 Ft útiköltség volt.
- Mennyi volt a kirándulás összes költsége?
 - Hány százaléka az útiköltség az étkezési költségnek?
- K** 18. Egy szakácskönyvben a rizsfelfújt elkészítéséhez a következő hozzávalókat adja meg a recept: 40 dkg rizs, 5 dl víz, 1 l tej, 10 evőkanál cukor, 6 tojás, 6 dkg margarin és 1 citrom héja. Ezekkel a mennyiségekkel elkészítve a rizsfelfújtat, épp megtelik a 22 cm × 36 cm-es tepsí. Mennyit vegyünk az egyes hozzávalókból, ha a nagyobb, 27 cm × 44 cm-es tepsit akarjuk megtölteni? (A két tepsí magassága egyenlő.)
- K** 19. Mennyi $(x + y) \cdot (x - y)$ értéke, ha 18 a 40-nek $x\%$ -a, és y -nak a 18 a 40%-a?
- K** 20. Egy 3200 Ft-os játék árát 20%-kal csökkentették, majd újabb 10%-ot engedtek az árból. Mennyibe kerül ezek után a játék? Hány százaléka ez az eredeti árnak?

1. ISMÉTLÉS

- K** 21. Egy kabát árát 30%-kal csökkentették. A vásár elmúltával először 20%-kal, majd újabb 10%-kal felemelték az árát. Mennyibe került eredetileg a kabát, ha a végén 4620 Ft lett az ára? Hány százaléka ez az eredeti árnak?
- K** 22. Egy vonaton utazó utas az út harmadának megtétele után elaludt, és csak akkor ébredt fel, amikor harmad akkora út állt még előtte, mint amennyit átaludt. Az egész út hányadrészét aludta át az utas?
- K** 23. Egy csapágyfém összetétele 80% ón, 12% antimon, a többi pedig réz.
a) Hány százaléka a réz mennyisége az antimonénak?
b) Mennyi annak a csapágnak a tömege, amelyben 160 g ón van?
- K** 24. Egy újszülött lány csecsemő tömege 5%-a az édesanyja tömegének. Mire 18 éves nagylány lesz, ez az arány 83%-ra növekszik. Ezalatt a 18 év alatt – az anyánál 10%-os súlygyarapodással számolva – hányszorosára nőtt a gyermek tömege?
- K** 25. Három testvér, András, Bea és Cili pénzének aránya 2 : 3 : 5.
a) Hányadrésze András pénze Ciliének?
b) Hány százaléka Bea pénze Andrásénak?
c) Hányadrésze Bea pénze a teljes összegnek?
d) Hány százalékkal több pénze van Beának és Cilinek együtt, mint Andrásnak?
e) Hány forintjuk van összesen, ha Andrásnak 1200 Ft-tal kevesebb pénze van, mint Cilinek?
- K** 26. A régi autónk 9,6 liter, az új pedig 7,2 liter üzemanyagot fogyaszt 100 km-en.
a) Határozza meg a két autó fogyasztásának arányát!
b) Hány százalékkal kevesebbet fogyaszt az új autó a réginél?
c) Mennyi pénzt takarítunk meg így 250 km megtételekor, ha a benzin ára $300 \frac{\text{Ft}}{\text{l}}$?
d) A régi autóval 320 km-es úton elfogyasztott üzemanyag milyen hosszú útra elég az új autóval?
- K** 27. Egy könyvkereskedőnek 15% engedményt adott a kiadó, így az 270 Ft-tal olcsóbban kapta meg a könyvet. A kereskedő az eredeti ár 90%-áért árulja a könyvet. Mennyi a kereskedő haszna könyvenként?