

Előszó .....	5
1. Hatvány, gyök, logaritmus .....	9
1.1. Az $n$ -edik gyök, törtkitevős hatványok .....	9
1.2. Exponenciális függvények .....	17
1.3. Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek ..	21
1.4. A logaritmus fogalma, azonosságai .....	25
1.5. A logaritmusfüggvény .....	29
1.6. Logaritmust tartalmazó egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek .....	30
2. Trigonometria .....	36
2.1. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között .....	36
2.2. Forgásszögek szögfüggvényei .....	42
2.3. Trigonometrikus egyenletek .....	50
2.4. Trigonometrikus függvények .....	54
3. Koordináta-geometria .....	56
3.1. Vektorok, szakaszok .....	56
3.2. Egyenesek .....	62
3.3. Körök .....	70
3.4. Parabolák .....	74
4. Valószínűségszámítás .....	77
4.1. Esemény-algebra .....	77
4.2. Geometriai valószínűség .....	82
4.3. Várható érték, szórás .....	86
5. Bizonyítási módszerek .....	91
5.1. Teljes indukció .....	91
5.2. Indirekt módszer .....	93
6. Sorozatok .....	95
6.1. Sorozatok tagjai, tagok összege .....	95
6.2. Fibonacci-sorozatos problémák .....	100
6.3. Sorozatok tulajdonságai .....	101

## TARTALOMJEGYZÉK

7. Térgeometria .....	105
7.1. Térelemek, testek .....	105
7.2. Térelemek hajlásszöge, távolsága .....	108
7.3. Felszín- és térfogatszámítás .....	112
8. Analízis .....	125
8.1. Függvény határértéke, folytonossága, deriváltja .....	125
8.2. Integrálszámítás .....	134

# 1. Hatvány, gyök, logaritmus



## 1.1. Az $n$ -edik gyök, törtkitevős hatványok

a) A gyökvonás a pozitív, egész kitevőjű *hatványozás inverz művelete* (mint az összeadásnak a kivonás, a szorzásnak az osztás):

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \xrightarrow{(\ )^3} 8 \quad 2 \xrightarrow{(\ )^4} 16 \quad 2 \xrightarrow{(\ )^5} 32 \quad \dots \quad 2 \xrightarrow{(\ )^n} 2^n \\ \text{vagy} \quad \text{vagy} \quad \dots \\ 2 \xleftarrow{\sqrt[3]{\ }} 8 \quad 2 \xleftarrow{\sqrt[4]{\ }} 16 \quad 2 \xleftarrow{\sqrt[5]{\ }} 32 \quad \dots \quad 2 \xleftarrow{\sqrt[n]{\ }} 2^n \end{array} \right. \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

*Megjegyzés:* Egy szám első gyöke önmaga (ezért nem is használjuk ezt a fogalmat).

b) 1. *definíció:* Egy **nemnegatív** valós szám  $2n$ -edik gyökén azt a **nemnegatív** számot értjük, melynek  $2n$ -edik hatványa az eredeti szám ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ).

2. *definíció:* Egy tetszőleges valós szám  $2n + 1$ -edik gyökén azt a számot értjük, melynek  $2n + 1$ -edik hatványa az eredeti szám ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ).

Másként:

$$\boxed{\left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a}, \text{ ahol páros } k \text{ esetén } a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \text{ páratlan } k \text{ esetén } a \in \mathbb{R}.$$

c) A gyökvonás *azonosságai* segítik a gyökös kifejezésekkel való számolást.

▪ Szorzat gyöke:  $\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}.$

▪ Hányados gyöke:  $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}} \quad (b \neq 0).$

▪ Hatvány gyöke:  $\boxed{\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^k}}.$

▪ Gyök gyöke:  $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}}.$

*Megjegyzés:* Az azonosságok a bennük szereplő kifejezések értelmezési tartományainak metszetén érvényesek.

d) *Gyökjel alól kihozatal* a tényezőnkénti gyökvonáson alapszik.

Pl.:  $\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{64 \cdot 2} = \sqrt[5]{64} \cdot \sqrt[5]{2} = 2 \cdot \sqrt[5]{2}.$

e) *Gyökjel alá bevital* az előző gondolatmenet fordított irányú alkalmazása.

Pl.:  $2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{48}.$

# 1. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

▪ *Gyökös kifejezések összehasonlíthatósága:*

Gyökjel alá bevitelével „eltüntetve” az együtthatót a gyökös kifejezések csak azonos gyökkitevő vagy azonos gyökjel alatti szám esetén hasonlíthatók össze:

– azonos gyökkitevő esetén (mely a 'gyök gyöke' azonossággal érhető el) az a nagyobb, melyben a gyökjel alatti szám a nagyobb.

Pl.:  $\sqrt[3]{6} > \sqrt{3}$ , mert  $\sqrt[3]{6} = \sqrt{\sqrt[3]{6^2}} = \sqrt[6]{36}$  és  $\sqrt{3} = \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{27}$ .

– azonos gyökjel alatti szám esetén az a nagyobb, melynek a gyökkitevője kisebb.

Pl.:  $\sqrt[6]{64} < \sqrt[3]{64}$ .

f) A gyökvonás, mint TÖRTKITEVŐJŰ hatványozás:

Pl.:  $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 8^{\frac{1}{3}} = 2$  vagy  $3^4 = 81 \Leftrightarrow \sqrt[4]{81} = 3 \Leftrightarrow 81^{\frac{1}{4}} = 3$ ,  
azaz

$$\boxed{x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}}$$

$$32^{\frac{1}{5}} = 2$$

$$32^{\frac{2}{5}} = 4$$

$$32^{\frac{3}{5}} = 8$$

$$32^{\frac{4}{5}} = 16$$

$$32^{\frac{5}{5}} = 32$$

$$32^{\frac{6}{5}} = 64$$

⋮

$$81^{\frac{1}{4}} = 3$$

$$81^{\frac{2}{4}} = 9$$

$$81^{\frac{3}{4}} = 27$$

$$81^{\frac{4}{4}} = 81$$

$$81^{\frac{5}{4}} = 243$$

⋮

$$81^{\frac{5}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^5 = 3^5 = 243$$

# 1. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

$$125^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$125^{\frac{2}{3}} = 25$$

$$125^{\frac{3}{3}} = 125$$

$$125^{\frac{4}{3}} = 625$$

⋮

$$125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{25}$$

*Definíció:* Egy pozitív valós szám  $\frac{k}{n}$ -edik hatványán a szám  $n$ -edik gyökének  $k$ -adik hatványát értjük, ahol  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

1. megjegyzés: Törtkitevőjű hatványokra továbbra is érvényesek a hatványozás azonosságai.

2. megjegyzés: **Pozitív alapú hatvány értéke bármilyen kitevő esetén pozitív!**

**K** 1. Adja meg egyetlen egész számként!

- a)  $\sqrt[3]{64}$ ;  
b)  $\sqrt[4]{625}$ .

**K** 2. Adja meg egyetlen egész számként!

- a)  $\sqrt[3]{-32}$ ;  
b)  $\sqrt[3]{-343}$ .

**K** 3. Adja meg egyetlen egész számként!

- a)  $\sqrt[4]{256}$ ;  
b)  $\sqrt[4]{-64}$ ;  
c)  $\sqrt[4]{(-5)^4}$ .

**K** 4. Számítsa ki a következő gyökvonások eredményét!

- a)  $\sqrt[3]{-8}$ ;  $\sqrt[3]{125}$ ;  $\sqrt[3]{-32}$ ;  $\sqrt[4]{81}$ ;  $\sqrt[3]{27}$ ;  $\sqrt[4]{10000}$ ;  $\sqrt[4]{64}$ ;

## 1. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

b)  $\sqrt[3]{-1}$ ;  $\sqrt[2]{512}$ ;  $\sqrt[4]{-16}$ ;  $\sqrt[5]{0}$ ;  $\sqrt[3]{-343}$ ;  $\sqrt[2]{128}$ ;

c)  $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ ;  $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$ ;  $\sqrt[6]{-\frac{1}{64}}$ ;  $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$ ;  $\sqrt[5]{\frac{32}{100000}}$ ;

d)  $\sqrt[3]{x^3}$ ;  $\sqrt[4]{a^4}$ ;  $\sqrt[5]{b^{10}}$ ;  $\sqrt[6]{x^{18}}$ ;  $\sqrt[4]{a^8}$ ;  $\sqrt[3]{(-c)^3}$ ;  $\sqrt[3]{(-y)^6}$ .

**K** 5. Az ismeretlen milyen értékénél igazak az alábbi egyenlőségek?

a)  $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ ;

b)  $\sqrt[3]{a^3} = a$ ;

c)  $\sqrt[6]{y^6} = y$ ;

d)  $\sqrt[5]{c^{10}} = c^2$ ;

e)  $\sqrt[4]{b^4} = -b$ ;

f)  $\sqrt[3]{(-a)^6} = a^2$ .

**K** 6. Adja meg a következő kifejezések értékét számológép használata nélkül!

a)  $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$ ;  $\sqrt[3]{8+27}$ ;

b)  $\sqrt[5]{32 \cdot 100000}$ ;  $\sqrt[5]{100000 : 32}$ ;

c)  $\sqrt[4]{81} : \sqrt[4]{16}$ ;  $\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{8}$ ;

d)  $\sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{20}$ ;  $\sqrt[4]{48} \cdot \sqrt[4]{27}$ ;

e)  $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2^5}$ ;  $\sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt[6]{3}$ ;

f)  $(\sqrt[5]{3})^{10}$ ;  $(\sqrt[3]{5})^9$ ;

g)  $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ ;  $\sqrt[5]{\sqrt[4]{32}}$ ;

h)  $\sqrt[24]{8}$ ;  $\sqrt[12]{81}$ .

**K** 7. Adja meg egyetlen racionális számként!

a)  $\sqrt[4]{\frac{1}{(-4)^2}}$ ;

# 1. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

b)  $\frac{\sqrt[5]{18} \cdot \sqrt[5]{-48} \cdot \sqrt[5]{-9}}{\sqrt[3]{-216}}$ .

**K** 8. Adja meg egyetlen racionális számként!

$$\frac{\sqrt[3]{4^5} \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{1000}}$$

**K** 9. Adja meg egyetlen egész számként!

a)  $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{20}} \cdot \sqrt[3]{100}}{\sqrt[6]{0,2}}$ ;

b)  $\frac{\sqrt[4]{15^5} \cdot \sqrt{\sqrt{27}} \cdot \sqrt[4]{1600}}{\sqrt{\sqrt{625}} \cdot \sqrt[4]{8000}}$ .

**K** 10. Adja meg egyetlen racionális számként!

$$\left(\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{320}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{243} - \sqrt[3]{72} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{200} - \sqrt[3]{25}\right).$$

**K** 11. Végezze el a kijelölt műveleteket!

a)  $\sqrt[6]{\sqrt{12} + \sqrt{11}} \cdot \sqrt[6]{2\sqrt{3} - \sqrt{11}}$ ;

b)  $\sqrt[5]{4\sqrt{10} + \sqrt{128}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{160} - 8\sqrt{2}}$ .

**K** 12. Számológép használata nélkül döntse el, hogy melyik szám a nagyobb!

a)  $\sqrt[3]{54}$  vagy  $2\sqrt[3]{7}$ ;

b)  $3\sqrt[4]{2}$  vagy  $2\sqrt[4]{10}$ ;

c)  $\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$  vagy  $\frac{3}{2}\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$ ;

d)  $\sqrt[3]{3}$  vagy  $\sqrt{2}$ ;

e)  $\sqrt[4]{16}$  vagy  $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ .

**K** 13. Számológép felhasználása nélkül döntse el, hogy melyik a nagyobb!

$$\sqrt{3} \text{ vagy } \sqrt[3]{4}.$$

# 1. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

- K** 14. Számológép használata nélkül rakja nagyság szerint nemnövekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$$\sqrt[3]{3}; \quad \sqrt{2}; \quad \sqrt[5]{5}; \quad \sqrt[4]{4}.$$

- E** 15. Igazolja, hogy a  $\sqrt[3]{5}$  irracionális szám!

- E** 16. Adja meg egyetlen egész számként!

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}.$$

- K** 17. Adja meg egyetlen egész számként!

$$\left(\sqrt[8]{8} - \sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[8]{8} + \sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{8} + \sqrt{3}\right).$$

- K** 18. Írja fel egyetlen gyökjellel!

a)  $\sqrt{2 \cdot \sqrt[5]{2}}; \quad \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[3]{2}};$

b)  $\sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[3]{2}}}; \quad \sqrt[4]{\frac{2}{5} \cdot \sqrt[6]{\frac{25}{4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{5}{2}}};$

c)  $\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a}}}; \quad \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x^6}}};$

d)  $\sqrt[3]{y \cdot \sqrt[7]{y}}; \quad \sqrt[4]{c^2 \cdot \sqrt{c^3} \cdot \sqrt[3]{c}};$

e)  $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}; \quad \frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[10]{b} \cdot \sqrt{b}}.$

- K** 19. Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket, ha  $a$  és  $b$  pozitív számok!

a)  $\frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^6}}{\sqrt{a^5} \cdot \sqrt{a^{-2}}};$

b)  $\frac{\sqrt{a^5 b^3} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$

- K** 20. Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést, ha  $a$  és  $b$  pozitív számok!

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[6]{b^{-7}}}{\sqrt[6]{a^{-6} b^{-6}}}.$$



# 1. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

**K** 21. Adja meg egyetlen racionális számként!

- a)  $16^{\frac{1}{4}}$ ;  
b)  $27^{-\frac{2}{3}}$ .

**K** 22. Adja meg egyetlen racionális számként!

- a)  $0,125^{\frac{2}{3}}$ ;  
b)  $64^{-\frac{4}{3}}$ .

**K** 23. Írja fel a 3 hatványaként!

- a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}$ ;  
b)  $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{\sqrt{27}}$ .

**K** 24. Írja fel a 3 hatványaként!

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt{3^5}.$$

**K** 25. Írja fel  $x$  hatványaként a következő kifejezéseket, ahol  $x > 0$ !

- a)  $\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}$ ;  
b)  $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}{x}$ .

**K** 26. Írja fel  $x$  hatványaként az alábbi kifejezést, ahol  $x > 0$ !

$$\frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

**K** 27. Rakja nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat!

$$5^{-1}; \quad 0,2^{\frac{4}{3}}; \quad \sqrt[3]{5}; \quad \sqrt{5}; \quad 5^{\frac{2}{3}}.$$

**K** 28. Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést, ahol  $a, b > 0$ !

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{ab}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}}.$$