

33.1. Függvény fogalma, jelölések

⌚ 15'

1. Az alábbi hozzárendelések közül melyek függvények?
- A magyarországi megyékhez hozzárendeljük a székhelyüket.
 - Az egész számokhoz hozzárendeljük a reciprokukat.
 - Az osztályod tanulóihoz hozzárendeljük a testvéreiket.
 - A racionális számokhoz hozzárendeljük a tizedes tört alakjukat.
 - A racionális számokhoz hozzárendeljük a közösleges tört alakjukat.

A válaszokat indokoljuk!

5 pont

2. Adjuk meg az alábbi függvények értékkészletét!

- $f: \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\} \mapsto x^2$
- Minden emberhez hozzárendeljük a hét azon napját, amikor született.
- Minden valós számhoz hozzárendeljük a nála nem nagyobb, legnagyobb egész számot.
- Minden ötös lottószelvényhez hozzárendeljük a vele elért találatok számát.
- Minden pozitív egész számhoz hozzárendeljük a pozitív egész osztóinak számát.

5 pont

3. $f(x) = \frac{2}{3}x + 2, D_f = \mathbb{R}$. Adjuk meg a függvény $-\frac{4}{3}$ helyen vett helyettesítési értékét!

2 pont

33.2. Függvény fogalma, jelölések

⌚ 15'

1. Az alábbi függvények közül melyek kölcsönösen egyértelműek?
- A magyarországi megyékhez hozzárendeljük a székhelyüket.
 - A pozitív egész számokhoz hozzárendeljük a reciprokukat.
 - Minden emberhez hozzárendeljük az édesanyját.
 - Bármely pozitív egész számpárhoz hozzárendeljük a legnagyobb közös osztójukat.
 - Bármely valós számhoz hozzárendeljük a neki megfeleltetett pontot a szám-egyenesen.

A válaszokat indokoljuk!

5 pont

2. Adjuk meg matematikai jelölésekkel a következő valós függvényeket!

- Minden pozitív egész számhoz hozzárendeljük a kétszeresüknél eggyel nagyobb számot.
- Minden nullától különböző valós számhoz hozzárendeljük a szám és reciprokának összegét.

- c) Minden valós számhoz hozzárendeljük az abszolút értékének $\frac{3}{4}$ részét.
- d) Minden természetes számhoz hozzárendeljük a nála hárommal kisebb szám köbét.
- e) Minden pozitív egész számhoz hozzárendeljük a nála nem nagyobb pozitív egész számok összegét. (5 pont)

3. $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + 2, D_f = \mathbb{R}$. Adjuk meg a függvény $\frac{2}{3}$ helyen vett helyettesítési értékét! (2 pont)

33.3. Függvény fogalma, jelölések



⌚ 15'

1. Az alábbi hozzárendelések közül melyek függvények, és azok közül melyek kölcsönösen egyértelműek?
- Minden emberhez hozzárendeljük a kedvenc ételét.
 - Minden valós számhoz hozzárendeljük az abszolút értéküket.
 - Minden kettes bob kormányosához hozzárendeljük a fékezőjét!
 - Bármely pozitív egész számpárhoz hozzárendeljük a legkisebb közös többszörösüket.
 - Bármely körhöz hozzárendeljük a középpontját.
- A válaszokat indokoljuk!* (5 pont)

2. Adjuk meg az alábbi matematikai jelölésekkel megadott függvényeket szavakkal!

- $f(x) = 2x^2 - 3, D_f = \mathbb{N};$
- $g(x) = 0, D_g = \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\};$
- $h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{ha } x < 0 \end{cases} D_h = \mathbb{R};$
- $i(x) = \frac{|x|}{2} + 2, D_i = \mathbb{R};$
- $j(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases} D_j = \mathbb{Q}.$ (5 pont)

3. $f(x) = \left| x^2 - \frac{2}{3}x + 2 \right|, D_f = \mathbb{R}$. Adjuk meg a függvény $\frac{3}{5}$ helyen vett helyettesítési értékét! (2 pont)

33.4. Függvény fogalma, jelölések

15'

1. Adjuk meg az alábbi függvények értékkészletét!

a) $f(x) = |x| + 3, D_f = [-3; 5[.$

b) Két kockával dobott számpárokhoz hozzárendeljük az összegüket.

c) $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x \text{ páros} \\ x, & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases} \quad D_g = \mathbb{Z}^+.$

d) Bármely pozitív egész számpárhoz hozzárendeljük a legkisebb közös többszörösüket.

e) Bármely síkbeli körhöz hozzárendeljük a középpontját.

5 pont

2. Adjuk meg az összes olyan, a pozitív valós számok halmazán értelmezett f függvényeket, melyekre bármely $x \in \mathbb{R}^+$ esetén $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x + 7!$

5 pont

3. $f(x) = \frac{5}{4x-3}, D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$. Adjuk meg a függvény $-\frac{3}{5}$ helyen vett helyettesítési értékét!

2 pont

34.1. Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer

15'

1. Ábrázoljuk a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat:

$A(3; 2); B(-1; 4); C(2; -3); D(-2; -2); E(0; 5)!$

5 pont

2. Ábrázoljuk a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x, y)$ pontokat, melyekre igaz, hogy $x \in [-3; 4[!$

5 pont

3. Egy téglalap három csúcsa $A(-3; 2), B(5; 2), C(5; -3)$. Adjuk meg a területét!

5 pont

34.2. Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer

15'

1. Egy paralelogramma egy körüljárási iránynak megfelelő három egymást követő csúcsa: $A(-3; -2), B(2; -2), C(3; 3)$. Adjuk meg a negyedik csúcs koordinátáit és a paralelogramma területét!

5 pont

33.1. Függvény fogalma, jelölések

15'

- Függvény, mert minden magyarországi megyének pontosan egy székhelye van.
 - Nem függvény, mert a nullának nincs reciproka.
 - Nem függvény, mert lehet olyan osztálytársad, akinek nincs testvére vagy több testvére is van.
 - Nem függvény, mert van olyan racionális szám, aminek két tizedes tört alakja van (például $1,5 = 1,4\bar{9}$).
 - Nem függvény, mert van olyan racionális szám, aminek több közösleges tört alakja van (például $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$).
- $\{0; 1; 4; 9\}$;
 - $\{\text{hétfő; kedd; szerda; csütörtök; péntek; szombat; vasárnap}\}$;
 - \mathbb{Z} ;
 - $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$;
 - \mathbb{Z}^+ .
- $$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 2 = -\frac{8}{9} + \frac{18}{9} = \frac{10}{9}.$$

33.2. Függvény fogalma, jelölések

15'

- Kölcsönösen egyértelmű, mert különböző megyéknek különböző székhelyük van.
 - Kölcsönösen egyértelmű, mert különböző pozitív egész számoknak különböző reciproka van.
 - Nem kölcsönösen egyértelmű, mert a testvéreknek ugyanaz az édesanyjuk.
 - Nem kölcsönösen egyértelmű, mert különböző számpároknak lehet ugyanaz a legnagyobb közös osztója (például: relatív prímekek).
 - Kölcsönösen egyértelmű, mert különböző számoknak különböző pontok felelnek meg.
- $f(x) = 2x + 1, D_f = \mathbb{Z}^+$;
 - $g(x) = x + \frac{1}{x}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 - $h(x) = \frac{3}{4}|x|, D_h = \mathbb{R}$;
 - $x \mapsto (x - 3)^3, D_i = \mathbb{N}$;
 - $i(x) = 1 + 2 + \dots + x, D_j = \mathbb{Z}^+$.



$$3. f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 2 = 2.$$

33.3. Függvény fogalma, jelölések



15'

- Nem függvény, mert van olyan ember, akinek több kedvenc étele van.
 - Függvény, mert minden valós számnak egy abszolút értéke van. Nem kölcsönösen egyértelmű, mert különböző valós számoknak lehet egyenlő az abszolút értéke (például $|2| = |-2|$).
 - Függvény, mert minden kettős bob kormányoshoz egyetlen fékezőt rendelünk. Kölcsönösen egyértelmű, mert egy fékező nem lehet egyszerre két kormányos mögött.
 - Függvény, mert minden pozitív egész számpárnak egyetlen legkisebb közös többszöröse van. Nem kölcsönösen egyértelmű, mert különböző pozitív egész számpároknak lehet ugyanaz a legkisebb közös többszörösük.
 - Függvény, mert minden körnek egy középpontja van. Nem kölcsönösen egyértelmű, mert különböző köröknek lehet azonos a középpontja (koncentrikus körök).
- Minden természetes számhoz hozzárendeljük a négyzete kétszeresénél hárommal kisebb számot.
 - Az egytől különböző pozitív egész számokhoz nullát rendelünk.
 - A nemnegatív számokhoz a négyzetüket rendeljük, a negatív számokhoz a négyzetük ellentettjét rendeljük.
 - Minden valós számhoz hozzárendeljük az abszolút értéke felénél kettővel nagyobb számot.
 - A pozitív racionális számokhoz egyet, a negatívokhoz -1 -et, a nullához nullát rendelünk.

$$3. f\left(\frac{3}{5}\right) = \left|\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + 2\right| = \left|\frac{9}{25} - \frac{2}{5} + 2\right| = \left|\frac{9}{25} - \frac{10}{25} + \frac{50}{25}\right| = \frac{49}{25}.$$

33.4. Függvény fogalma, jelölések



15'

- $[3; 8]$;
 - $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$;
 - \mathbb{Z}^+ ;
 - \mathbb{Z}^+ ;
 - A sík pontjai.



2. A feltétel szerint $x \in \mathbb{R}^+$ esetén: $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x + 7$ (1)

Ez esetben $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$, erre is igaz a feltételi egyenlet: $f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \frac{5}{x} + 7$ (2)

Szorozzuk meg 3-mal a (2) egyenlet mindkét oldalát!

$$3f\left(\frac{1}{x}\right) + 9f(x) = \frac{15}{x} + 21 \quad (3).$$

Vonjuk ki a (3) egyenletből az (1) egyenletet!

Azt kapjuk, hogy $8f(x) = \frac{15}{x} - 5x + 14$.

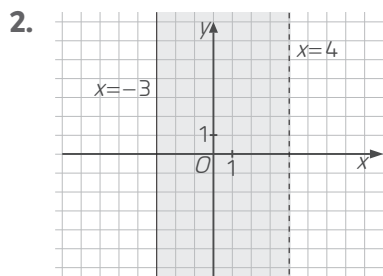
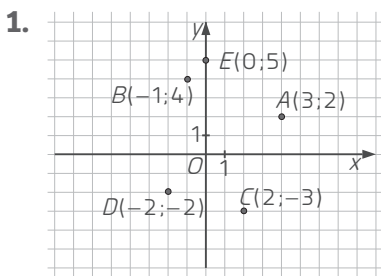
Innen $f(x) = \frac{15}{8x} - \frac{5x}{8} + \frac{7}{4}$.

3. $f\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{5}{4\left(-\frac{3}{5}\right) - 3} = \frac{5}{-\frac{12}{5} - \frac{15}{5}} = \frac{5}{-\frac{27}{5}} = -\frac{25}{27}$.

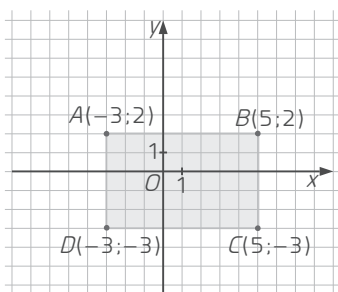
34.1. Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer



15'



3. $AB = |5 - (-3)| = 8$ és $BC = |2 - (-3)| = 5$. Így a téralap területe: $AB \cdot BC = 8 \cdot 5 = 40$.



ELŐSZÓ	5
HALMAZOK.....	7
1.1. Halmaz fogalma, jelölések	7
2.1. Számhalmazok, műveletek.....	9
3.1. Részhalmazok	11
4.1. Halmazműveletek	12
5.1. Ponthalmazok	15
6.1. Logikai szita.....	16
7.1. Halmazok.....	18
ALGEBRA, SZÁMELMÉLET	21
8.1. Algebrai kifejezések	21
9.1. Pozitív egész kitevős hatvány	22
10.1. Egész kitevős hatvány.....	24
11.1. Számok normálalakja.....	26
12.1. Polinomok.....	28
13.1. Két tag összegének és különbségének a négyzete	30
14.1. Két tag összegének és különbségének szorzata.....	31
15.1. Két tag összegének és különbségének köbe.....	33
16.1. Nevezetes azonosságok	34
17.1. Kiemelés, csoportosításos kiemelés.....	36
18.1. Szorzattá alakítás azonosságok alkalmazásával	38
19.1. Teljes négyzetté alakítás	39
20.1. Polinomok szorzattá alakítása.....	41
21.1. Algebrai tört helyettesítési értéke, értelmezési tartománya.....	42
22.1. Algebrai tört egyszerűsítése, bővítése	44
23.1. Algebrai tört szorzása és osztása	46
24.1. Algebrai törtek összevonása.....	48
25.1. Algebrai törtek	49
26.1. Oszthatósági szabályok	51
27.1. Prímfaktorizáció	53
28.1. Legnagyobb közös osztó	54
29.1. Legkisebb közös többszörös.....	56
30.1. Számrendszerek	57
31.1. Számelmélet.....	59
32.1. Algebra és számelmélet	60
FÜGGVÉNYEK.....	62
33.1. Függvény fogalma, jelölések	62
34.1. Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer.....	64
35.1. Lineáris függvények.....	65
36.1. Másodfokú függvények.....	67

37.1. Legfeljebb másodfokú függvények	67
38.1. Négyzetgyök	69
39.1. Négyzetgyökös függvények	70
40.1. Abszolút értékes függvények.....	71
41.1. Lineáris törtfüggvények.....	72
42.1. Függvények.....	73
ELSŐ FÉLÉVI ÖSSZEFOGLALÁS	76
43.1. Halmazok, számelmélet, algebra, függvények	76
GEOMETRIA.....	79
44.1. Sokszögek átlóinak száma.....	79
45.1. Sokszögek belső és külső szögeinek összege	80
46.1. Sokszögek átlói és szögei	82
47.1. Háromszög-egyenlőtlenségek	83
48.1. Speciális háromszögek	84
49.1. Speciális négyszögek	85
50.1. A kör és részei	87
51.1. A háromszög köré írható kör	88
52.1. A háromszögbe írható kör	89
53.1. A háromszög körei.....	90
54.1. Pitagorasz-tétel.....	92
55.1. Összefüggés a háromszög oldalai és szögei között.....	93
56.1. Tengelyes tükrözés.....	95
57.1. Középpontos tükrözés	96
58.1. Pont körüli elforgatás	97
59.1. Eltolás.....	98
60.1. Egybevágósági transzformációk.....	99
61.1. Szimmetrikus ponthalmazok.....	101
62.1. Háromszög súlyvonalai, súlypontja	102
63.1. Háromszög magasságvonalai, magasságpontja.....	103
64.1. Háromszög nevezetes pontjai, vonalai, körei	104
65.1. Thalész-tétel.....	105
66.1. Ívhossz, körcikk területe	106
67.1. Vektorok.....	107
68.1. Egybevágó síkidomok	108
69.1. Geometria.....	110
EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK	113
70.1. Egyenletek grafikus megoldása	113
71.1. Egyenletek megoldása algebrai úton I.	114
72.1. Egyenletek megoldása algebrai úton II.	115
73.1. Egyenlőtlenségek megoldása	117

74.1. Abszolútértékes egyenletek.....	118
75.1. Szöveges egyenletek.....	120
76.1. Egyenletrendszerek megoldása.....	121
77.1. Szöveges egyenletrendszerek.....	123
78.1. Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek	124
STATISZTIKA.....	127
79.1. Adatok ábrázolása.....	127
80.1. Statisztikai közepek.....	128
81.1. Statisztika.....	130
MÁSODIK FÉLÉVI ÖSSZEFOGLALÁS	134
82.1. Geometria, egyenletek, statisztika	134
ÉV VÉGI ÖSSZEFOGLALÁS.....	138
83.1. A 9. osztályos tananyag	138